Kombinatorika – összeszámlálási alapfeladatok

1. Ismétlés nélküli permutáció

n elem ismétlés nélküli permutációja: n különböző elem összes lehetséges sorrendjéből egy

n elem ismétlés nélküli permutációinak száma: $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

Megjegyzések: n! neve „n faktoriális”; 0! = 1; $P_n = n \cdot P_{n-1}$

(ültetés padon, kerek asztalnál, gyöngyök, bástyák)

2. Ismétléses permutáció

n elem ismétléses permutációja: n – nem feltétlenül különböző – elem lehetséges sorrendjeiből egy

n elem ismétléses permutációinak száma, ha az elemek között k_1, k_2, … k_r darab egyforma van: $P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}$

(betűkártyákból szavak, számkártyákból számok)

3. Ismétlés nélküli variáció

n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációi: az n elemű halmaz k elemű rendezett részhalmazai

n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak száma: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Megjegyzés: számít a sorrend!

(dobogós helyek)

4. Ismétléses variáció

n elemű halmaz k-ad osztályú ismétléses variációja: egy olyan k tagú, a halmaz elemeiből készített csoport, amelyben az n elemű halmaz egy eleme akárhányszor (legfeljebb k-szor) előfordulhat, és az elemek sorrendje lényeges

n elemű halmaz k-ad osztályú ismétléses variációinak száma: $V_n^{k,i} = n^k$

(totó, számjegyekből számok, szó leolvasása háromszög alakból)

5. Ismétlés nélküli kombináció

n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációja: n különböző elem közül k különböző elem lehetséges kiválasztásai közül egy

n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma: $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

(lottó, szó leolvasása téglalap alakból)

Megjegyzések: nem számít a sorrend!; Pascal háromszög,binomiális együtthatók; binomiális tétel:
$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n$;

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$; $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$; $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$, ha n≥k, k≥1;
$k^2 \binom{n}{k} = k\binom{n}{k} + k(k-1)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} + n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$, ha n≥k, k≥2 (ha k=1, akkor $k^2\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$).

6. Ismétléses kombináció

n elemű halmaz k-ad osztályú ismétléses kombinációja: egy olyan k tagú, a halmaz elemeiből készített csoport, amelyben az n elemű halmaz elemei akárhányszor (de legfeljebb k-szor) fordulhatnak elő, és az elemek sorrendje nem számít

n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma: $C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$

Megjegyzés: $C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$

(sütemény, díjazás, kártya: szín)

R függvények: *factorial*, a^n, *choose*, (install: „combinat”: *permn*, *combn*)

Valószínűségszámítás

Egy kísérlet lehetséges kimenetelei: *elemi események (jele: ω)*.

Lehetetlen esemény: ∅.

Biztos esemény: Ω, így jelöljük az elemi események összességét is, amelyet *elemi eseménytérnek* nevezünk.

Események (véletlen események, összetett események): az elemi események halmazai (jelölésük: A, B, C, stb.). Ezek Ω részhalmazai.

Műveletek eseményekkel (ω ∊ Ω; A, B,C ⊆ Ω) :

A *maga után vonja* B-t (A ⊆ B), ha minden ω elemi eseményre igaz, hogy ha ω ∊ A, akkor ω ∊ B.

Két esemény , A és B akkor *egyenlő* egymással, ha A maga után vonja B-t és B maga után vonja A-t.

Az A esemény *komplementere* az Ā esemény (másik jelöléssel A^C), ha ω ∊ A esetén ω ∉ Ā, és ω ∊ Ā esetén ω ∉ A.

Az A és B események *egyesítése, uniója* (összege) az A ∪ B (másik jelöléssel A + B) esemény, amely mindazon elemi eseményeket tartalmazza, amelyek az A vagy B eseményhez (akár mindkettőhöz is!) hozzátartoznak. *k* darab, vagy akár – megszámlálhatóan – végtelen A_i esemény esetén: $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Az A és B események *közös része, metszete* (szorzata) az A ∩ B (másik jelöléssel A · B) esemény, amely csak azon elemi eseményeket tartalmazza, amelyek az A és B eseményhez is hozzátartoznak. $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

Az A és B események *egymást kizáróak*, ha szorzatuk a lehetetlen esemény (A ∩ B = ∅). (Tehát egyszerre nem következhetnek be. Halmazok esetén ennek a diszjunkt halmazok fogalma felel meg.)

Az A és B események *különbsége* az A \ B (másik jelöléssel A – B) esemény, amelynek elemei hozzátartoznak A-hoz, de B-hez nem. $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ (azaz A – B = A · B^C)

Eseményalgebra: Az események 𝔸-val jelölt halmaza a fenti műveletekkel (tehát 𝔸 elemei Ω részhalmazai, másnéven 𝔸 Ω hatványhalmazának részhalmaza).

Az eseményalgebra zárt az összeadásra és a szorzásra, végtelen sok tag esetén is (zárt a végtelen unióra: szigma-algebra). Zárt a komplementerképzésre is. Tartalmazza a lehetetlen eseményt (∅) és a biztos eseményt is (Ω).

Az A esemény f_A *gyakorisága (frequency)*: egy n elemű kísérlet során az A esemény hányszor következik be. A *relatív gyakoriság*: f_A / n azt mutatja meg, hogy az A esemény milyen arányban következik be a kísérlet hosszához képest.

Kolmogorov-axiómák: A véletlen kísérlethez tartozó 𝔸 eseménytér minden A eseményéhez (A ∊ 𝔸, A ⊂ Ω) hozzárendelünk egy P(A) számot – amelyet az A esemény valószínűségének is nevezünk –, amelyre igaz, hogy

1. 0 ≤ P(A),
2. P(Ω) = 1, és
3. Ha A és B kizáró események (A ∩ B = ∅), akkor P(A ∪ B) = P(A) + P(B).
(Általánosabban: ha $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ megszámlálhatóan sok, páronként kizáró esemény, akkor $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.)

Az (Ω, 𝔸, P) hármast *Kolmogorov-féle valószínűségi mezőnek* nevezzük.

Az axiómákból következik néhány tulajdonság is. $\forall A, B \subseteq \Omega$

1. P(A) ≤ 1,
2. P(∅) = 0,
3. P(Ā) = 1 – P(A),
4. P(A + B) = P(A) + P(B) – P(A · B),
5. P(A – B) = P(A · B^C) = P(A) – P(A · B), és
6. ha A ⊂ B, akkor P(A) ≤ P(B) (ezt a tulajdonságot a valószínűség monoton jellegének is nevezzük).

A *valószínűség* egy, az eseményalgebrából a valós számok [0; 1] intervallumára képező függvény, amelyre teljesülnek a Kolmogorov-axiómák.

> *„Egy véletlen esemény relatív gyakorisága a különböző kísérletsorozatokban általában különböző, de a jelenségek egy részénél bizonyos stabilitást mutat. Ha a kísérletet sokszor elvégezve a relatív gyakoriság egy fix szám körül ingadozik, akkor ezt a számot az A esemény valószínűségének nevezzük, és P(A)-val jelöljük."*

(A *nagy számok törvénye)*

Sztochasztikus konvergencia!!!

Klasszikus valószínűség*i mező*: az Ω véges halmaz (véges sok kimenetel van), és minden kimenetel egyformán valószínű. Ha n kimenetel van, akkor minden kimenetel valószínűsége 1/n (mert kizárják egymást és összegük vagy uniójuk a biztos esemény).

Ebből következik a (már középiskolából is jól ismert) *klasszikus valószínűség* fogalma: *P(A) = k / n*, ahol n az összes (elemi) esemény száma, k pedig az A eseményhez tartozó azaz számunkra (az A esemény bekövetkezése vizsgálatának szempontjából) kedvező (elemi) események száma.

> *„A klasszikus valószínűséget úgy számoljuk ki, hogy a kedvező esetek számának és az összes eset számának a hányadosát vesszük: P(A) =* $\frac{k.e.sz.}{ö.e.sz.}$*."*

Visszatevéses és visszatevés nélkül mintavételezés

N elem, köztük M kitüntetett, n darabot megvizsgálunk (kihúzunk, megfigyelünk), mekkora a valószínűsége, hogy a n elemű mintában éppen k darab kitüntetett lesz?

Visszatevés nélküli mintavételezésnél: $P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Visszatevéses mintavételezésnél:

$$P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}\cdot M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^k} = \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{M}{N}\right)^k\cdot\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

(Meglepő lehet, hogy az egyik képletben a kiválasztások száma a sorrend figyelembevételével, a másikban anélkül került meghatározásra. Ennek az a magyarázata, hogy a visszatevés nélküli esetben a két megközelítés ugyanazt az eredményt adja, de a sorrend figyelembevétele nélkül hosszadalmasabb lenne a számolás, a visszatevéses esetben viszont csak akkor alkalmazható a „klasszikus modell", ha a sorrendet nem vesszük figyelembe.)

Geometriai valószínűség: ha a Ω eseménytér eseményei mérhető geometriai alakzatok (m: $\Omega \to \mathbb{R}$ mértékkel), és egy tartományba esés valószínűsége egyenesen arányos a tartomány geometriai mértékével, akkor az A tartományba esés valószínűsége: P(A) = m(A) / m(Ω).

Az A esemény B eseményre vonatkoztatott ***feltételes valószínűsége***: a $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$ hányados (ahol A, B egy eseményalgebra két eseménye, és $P(B) \neq 0$).

… ennyi a valószínűsége annak, hogy az A esemény bekövetkezik, feltéve / ha tudjuk, hogy B esemény bekövetkezik!

Az A és B *események* ($P(B) \neq 0$) ***függetlenek*** egymástól, ha $P(A|B) = P(A)$.

Állítás: az A és B események akkor és csak akkor függetlenek egymástól, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Valószínűségi változó: X: $\Omega \to \mathbb{R}$ függvény (az eseménytér elemeihez valós számokat rendel), amelyre igaz, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $\{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\}$ halmaz az $\mathbb{A}$-nak eleme (azaz van valószínűsége).

- *diszkrét valószínűségi változó*: értékkészlete véges vagy megszámlálhatóan végtelen

- *folytonos valószínűségi változó*: értékkészlete continuum számosságú (nem megszámlálhatóan végtelen), és van sűrűségfüggvénye (ld. később)

Két valószínűségi változó független egymástól, ha az egyikkel kapcsolatos bármely esemény független a másikkal kapcsolatos bármely eseménytől.