Kombinatorika – összeszámlálási alapfeladatok

1. Ismétlés nélküli permutáció
2. Ismétléses permutáció
3. Ismétlés nélküli variáció
4. Ismétléses variáció
5. Ismétlés nélküli kombináció
6. Ismétléses kombináció

Valószínűségszámítás

Egy kísérlet lehetséges kimenetelei: *elemi események (jele: ω)*. *Lehetetlen esemény*: $\emptyset$. *Biztos esemény*: Ω, így jelöljük az elemi események összességét is, amelyet *elemi eseménytérnek* nevezünk.

Események (véletlen események, összetett események): az elemi események halmazai (jelölésük: A, B, C, stb.). Ezek Ω részhalmazai.

Klasszikus valószínűségi mező

Visszatevéses és visszatevés nélkül mintavételezés

N elem, köztük M kitüntetett, n darabot megvizsgálunk (kihúzunk, megfigyelünk), mekkora a valószínűsége, hogy a n elemű mintában éppen k darab kitüntetett lesz?

Visszatevés nélküli mintavételezésnél: $P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Visszatevéses mintavételezésnél: $P(X=k)=\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

- *diszkrét valószínűségi változó*: értékkészlete véges vagy megszámlálhatóan végtelen

- *folytonos valószínűségi változó*: értékkészlete continuum számosságú (nem megszámlálhatóan végtelen), és van sűrűségfüggvénye (ld. később)

Eloszlásfüggvény

A X valószínűségi változó ***eloszlásfüggvénye*** az F: $\mathbb{R} \to [0; 1]$, **F(x) = P(X < x)** függvény.

Az eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. Monoton nő,
2. Balról folytonos ($F(x_0) = \lim_{x \to x_0-} F(x)$),
3. Határértéke $-\infty$-ben 0, $+\infty$-ben 1 ($\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ és $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$).

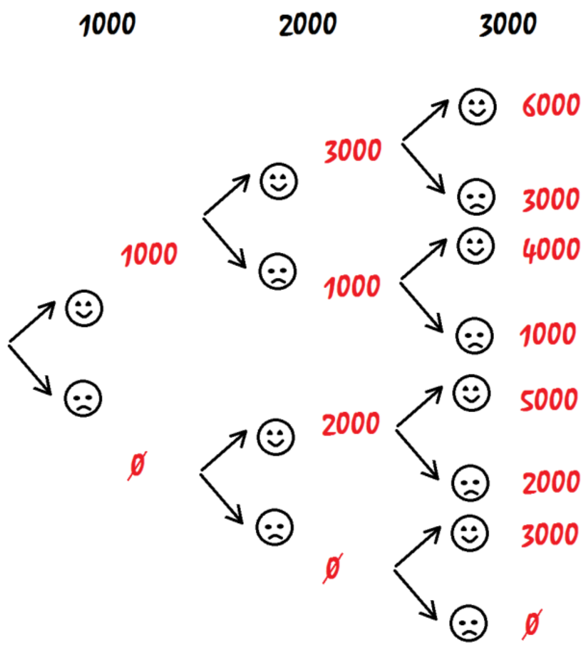
(pl. kockadobás; „Feldobunk egy szabályos pénzérmét. Jelölje X_1 a fejek számát! Határozza meg és ábrázolja X_1 eloszlásfüggvényét!”; „Három ember között először 1000, majd 2000 és végül 3000 Ft-ot sorsolnak ki. Az egyes sorsolások eredménye független egymástól. Jelölje X egy előre kiszemelt játékosnak a három sorsolás alapján jutó ezresek számát! Határozza meg és ábrázolja X eloszlásfüggvényét, és adja meg annak valószínűségét, hogy az illető 3000, illetve 3500 Ft-nál kevesebbet nyer!”)

Példa

„Két ember között először 1000, majd 2000 és végül 3000 Ft-ot sorsolnak ki. Az egyes sorsolások eredménye független egymástól. Jelölje X egy előre kiszemelt játékosnak a három sorsolás alapján jutó ezresek számát! Határozza meg és ábrázolja X eloszlásfüggvényét!”

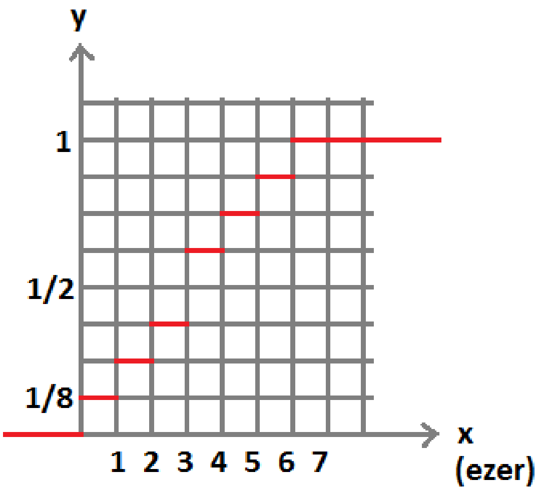
Hányféle kimenetele lehet a játéknak? 3 sorsolás van, mindegyiket vagy megnyeri, vagy nem

2^3 lehetőség, mindegyik $1 / 2^3$ valószínűséggel



Mennyit nyerhet a játékos? X értékkészlete:	*Mekkora valószínűséggel?*
0 (semmit)	1 / 8
1000 (csak az 1000-et)	1 / 8
2000 (csak a 2000-et)	1 / 8
3000 (csak a 3000-et VAGY az 1000-et és a 2000-et)	2 / 8
4000 (az 1000-et és a 3000-et)	1 / 8
5000 (a 2000-et és a 3000-et)	1 / 8
6000 (mindegyiket)	1 / 8

Az eloszlásfüggvény grafikonja:



Az eloszlásfüggvény: $F(x) = \begin{cases} 0, & ha\ x \leq 0 \\ \frac{1}{8}, & ha\ 0 < x \leq 1000 \\ \frac{2}{8}, & ha\ 1000 < x \leq 2000 \\ \frac{3}{8}, & ha\ 2000 < x \leq 3000 \\ \frac{5}{8}, & ha\ 3000 < x \leq 4000 \\ \frac{6}{8}, & ha\ 4000 < x \leq 5000 \\ \frac{7}{8}, & ha\ 5000 < x \leq 6000 \\ 1, & ha\ 6000 < x \end{cases}$

(Példa vége)

Az X diszkrét valószínűségi változó *eloszlása*: $\{x_k\}_k$ számok és a hozzájuk tartozó $\{p_k\}_k$ valószínűségek.

Sűrűségfüggvény

Az X folytonos valószínűségi változó ***sűrűségfüggvénye*** az f(x) függvény, ha minden x ϵ $\mathbb{R}$ esetén $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. (Tehát F'(x) = f(x).)

A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. f(x) ≥ 0,
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$,
3. $\lim_{\pm\infty} f(x) = 0$ (határértéke $-\infty$-ben és $+\infty$-ben is 0).

P(x ≥ X) = 1 – P(x < X) = 1 – F(x),

P(a ≤ X < b) = 1 – F(a) – (a – F(b)) = F(b) – F(a) = $\int_a^b f(x)dx$.

Példa

Milyen A valós szám esetén lesz sűrűségfüggvény az alábbi valós függvény?

Írjuk fel az eloszlásfüggvényét!

$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{x}}, ha\ 1 \leq x < 9, \\ 0, \quad különben \end{cases}$

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{9} f(x)\,dx + \int_{9}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{9} \frac{A}{\sqrt{x}}\,dx + \int_{9}^{+\infty} 0\,dx =$

$= \int_{1}^{9} A \cdot x^{-\frac{1}{2}}\,dx = A \cdot \int_{1}^{9} x^{-\frac{1}{2}}\,dx = A \cdot [\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}]_1^9 = A \cdot [2 \cdot x^{\frac{1}{2}}]_1^9 = A \cdot 2 \cdot [\sqrt{x}]_1^9 = 2A \cdot (3-1) = 4A$

$4A = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{4}$

b) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & ha\ x \leq 1 \\ A \cdot 2 \cdot \sqrt{x} + C, & ha\ 1 < x \leq 9 \\ 1, & ha\ 9 < x \end{cases}$$

Tehát

$$F(x) = \begin{cases} 0, & ha\ x \leq 1 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x} + C\,, & ha\ 1 < x \leq 9 \\ 1, & ha\ 9 < x \end{cases}$$

Honnan derül ki, hogy mennyi a *C* értéke?

Az eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. Monoton nő,

2. Balról folytonos ($\boldsymbol{F(x_0) = lim_{x \to x_0 -} F(x)}$ ***),***

3. Határértéke $-\infty$*-ben 0,* $+\infty$*-ben 1 (*$lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *és* $lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$*).*

Mi a helyzet x = 1-ben és x = 9-ben?

$F(1) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1} + C = \frac{1}{2} + C$ és $F(9) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9} + C = 1\frac{1}{2} + C$

$lim_{x \to 1-} F(x) = 0$ *és* $F(9) = 1$

Ebből: $C = -\frac{1}{2}$ és $\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{ha\ x \leq 1} \\ \boldsymbol{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2}}, & \boldsymbol{ha\ 1 < x \leq 9} \\ \boldsymbol{1}, & \boldsymbol{ha\ 9 < x} \end{cases}$

(Példa vége)

Folytonos valószínűségi változó minden értékét 0 valószínűséggel veszi fel (P(X = x) = 0).

Várható érték

Az X valószínűségi változó *várható értéke*:

- diszkrét esetben: $E(X) = \sum_i x_i \cdot p_i$

- folytonos esetben: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$

Szórásnégyzet, szórás

Egy X valószínűségi változó *szórásnégyzete / varianciája*: $D^2(X) = E([X - E(X)]^2)$

$D^2(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + E^2(X)) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X) = E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$

- diszkrét változó esetén: $D^2(X) = \sum_i x_i^2 \cdot p_i - (\sum_i x_i \cdot p_i)^2$

- folytonos változó esetén: $D^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx\right)^2$

Egy X valószínűségi változó *szórása*: szórásnégyzetének a négyzetgyöke ($D(X) = \sqrt{D^2(X)}$).

Nevezetes diszkrét eloszlások

Karakterisztikus eloszlás

Értékkészlete: {0; 1}

P(X = 1) = p; P(X = 0) = 1–p

E(X) = p; D^2(X) = p(1–p)

Binomiális eloszlás – a **visszatevéses mintavételezés** leírására!

Egy kísérletet n-szer elvégezve megfigyeljük, hogy a *p* valószínűségű *A* esemény hányszor következik be.

Értékkészlete: {0; 1; 2; … ; n}

$$\boldsymbol{P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$$

E(X) = np; $D^2(X)=np(1-p)$ (alapja: $k\cdot\binom{n}{k}=n\cdot\binom{n-1}{k-1}$; $k^2\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}+n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$)

Hipergeometrikus eloszlás – a **visszatevés nélküli mintavételezés** leírására! (M ≤ N, n ≤ M)

Értékkészlete: {0; 1; 2; … ; n}

$$\boldsymbol{P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

E(X) = $n\frac{M}{N}$; $D^2(X)=n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$ (alapja: $\binom{M}{k}=M\cdot\binom{M-1}{k-1}$; $\sum_{k=1}^{n}\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}=\binom{N-1}{n-1}$)

Poisson eloszlás

Olyan folyamatokat lehet jól modellezni a Poissonnal, ahol

– az átlagos darabszám a megfigyelési tartomány nagyságával arányos, valamint

– diszjunkt megfigyelési tartományokban a darabszámok függetlenek egymástól

Értékkészlete: {0; 1; 2; … } (megszámlálhatóan végtelen)

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

E(X) = λ; $D^2(X)=\lambda$

(porosz katonák, hullócsillagok, elefántok)

Siméon Denis Poisson (1781–1840) francia matematikus, fizikus, statisztikus

Határeloszlások

1. Hipergeometrikus eloszlás N, M, n, paraméterekkel. Ha p = M / N állandó, de M, N külön tart a végtelenhez, akkor a hipergeometrikus eloszlás határesete a binomiális eloszlás (n, p paraméterekkel).

2. Binomiális eloszlás p, n paraméterekkel. Ha n·p = λ állandó, és n tart a végtelenhez, akkor a binomiális eloszlás határeloszlása a λ paraméterű Poisson-eloszlás.

Nevezetes folytonos eloszlások

Egyenletes eloszlás – *]a; b] intervallumon*

Sűrűségfüggvénye: $f(x)=\begin{cases}0, ha\ x\ \le a,\\ \frac{1}{b-a},\quad ha\ a\ < x\le b,\\ 0,\ ha\ b\ < x.\end{cases}$

Eloszlásfüggvénye: $F(x)=\begin{cases}0, ha\ x\ \le a,\\ \frac{x-a}{b-a},\quad ha\ a\ < x\le b,\\ 1,\ ha\ b\ < x.\end{cases}$

$E(x)=\frac{a+b}{2}$, $D^2(X)=\frac{(a-b)^2}{12}$

Exponenciális eloszlás

Sűrűségfüggvénye: $f(x) = \begin{cases} 0, & ha\ x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & ha\ 0 \leq x. \end{cases}$

Eloszlásfüggvénye: $F(x) = \begin{cases} 0, & ha\ x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & ha\ 0 \leq x. \end{cases}$

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$; $D^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Normális (Gauss-)eloszlás ☺

μ, σ paraméterű normális eloszlás, jele: N(μ; σ)

- sűrűségfüggvénye: $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

- eloszlásfüggvénye: $F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$

E(X) = μ; $D^2(X) = \sigma^2$; **D(X) = σ**

Carl Friedrich Gauss (1777 –1855, Göttingen) német matematikus, természettudós és csillagász